Untersuchungen über äquivalente Variations-probleme von mehreren Veränderlichen

Von A. MOÓR in Sopron (Ungarn)

§ 1. Einleitung

Es sei $F(x^i, \dot{x}^i_\alpha)$ $(i=1, 2, \ldots, n;\ \alpha=1, 2, \ldots, m;\ 1 \leqq m < n)$ eine Funktion der $n(m+1)$ Veränderlichen x^i und $\dot{x}^i_\alpha$, ferner nehmen wir an, daß $F(x^i, \dot{x}^i_\alpha)$ in den x^i mindestens einmal, in den $\dot{x}^i_\alpha$ aber mindestens dreimal stetig differenzierbar ist. Mit Hilfe dieser Funktion sei ein m-parametriges Integral von der Form:

$$\mathscr{I}(F) \overset{\text{def}}{=} \int_{\mathscr{A}_m} \!\!\ldots \int F\left(x^i(u^1, u^2, \ldots, u^m)\, \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\right) du^1 \ldots du^m \tag{1.1}$$

festgelegt, wo $\mathscr{A}_m$ ein m-dimensionales Bereich des n-dimensionalen Punktraumes X_n bedeutet. Der Euler—Lagrangesche Operator des Integrals (1.1) ist:

$$\mathscr{E}_i(F) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{d}{du^\alpha}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i_\alpha}, \quad \dot{x}^i_\alpha \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}, \tag{1.2}$$

wo jetzt, und im folgenden die Einsteinsche Summationskonvention auf doppelt vorkommende Indizes immer gelten soll. Die $\dot{x}^i_\alpha$ bilden m Tangentenvektoren des Unterraumes $x^i(u^\alpha)$; diese sollen immer linear-unabhängig sein.

Ist nun (1.1) das Grundintegral eines Variationsproblems, so genügen die extremalen Unterräume bekanntlich dem Differentialgleichungssystem

$$\mathscr{E}_i(F) = 0. \tag{1.3}$$

Zwei Variationsprobleme mit den Grundfunktionen $F(x^i, \dot{x}^i_\alpha)$ und $F^*(x^i, \dot{x}^i_\alpha)$ nennen wir äquivalent, falls die Schar ihrer extremalen Unterräume übereinstimmt.

In den Arbeiten [1] und [2] haben wir gewisse Type von äquivalenten Variationsproblemen untersucht. In [1] war das Grundintegral ein einparametriges parameterinvariantes Integral; in [2] war aber das Grundintegral ein $(n-1)$-parametriges Integral, die Parameterinvarianz war aber bei diesem Fall nicht bedingt. Im folgenden seien nun m-parametrige parameterinvariante Integrale von der Form (1.1) zu Grunde gelegt. Die Parameterinvarianz bedeutet, daß die Funktion $F(x^i, \dot{x}^i_\alpha)$ den Relationen

$$(1.4) \qquad (\partial_{\dot{x}^i_\alpha} F)\dot{x}^i_\beta = \delta^\alpha_\beta F(x, \dot{x}_\gamma), \qquad (x\colon x^1, \dots, x^n;\ \dot{x}_\gamma\colon \dot{x}^1_\gamma, \dots, \dot{x}^n_\gamma)$$

genügt (vgl. [3], S. 268). Jetzt und im folgenden werden die lateinischen Indizes immer die Zahlen $1, 2, \dots, n$; die griechischen aber die Zahlen $1, 2, \dots, m$ durchlaufen. Die in (1.4) verwandte Bezeichnungen $(x, \dot{x}_\gamma)$ bedeuten: $(x^i, \dot{x}^i_\gamma)$ (vgl. (1.2)). Aus (1.4) erhält man nach einer partiellen Ableitung nach $\dot{x}^k_\varrho$ die im späteren wichtige Relation (vgl. [3], S. 270):

$$(1.5) \qquad (\partial^2_{\dot{x}^i_\alpha \dot{x}^k_\varrho} F)\dot{x}^i_\beta \equiv \delta^\alpha_\beta \partial_{\dot{x}^k_\varrho} F - \delta^\varrho_\beta \partial_{\dot{x}^k_\alpha} F.$$

Wir wollen jetzt solche äquivalente Variationsprobleme untersuchen, deren Euler—Lagrangesche Operatoren miteinander durch die Formeln

$$(1.6) \qquad \mathscr{E}_i(F^*) \equiv \lambda^k_i(x)\mathscr{E}_k(F), \qquad \lambda^k_i(x) \neq 0,$$

verbunden sind, wo die Funktionen $\lambda^k_i(x)$ einen nur vom Orte x^i abhängigen gemischten Tensor bedeuten, und die Relation (1.6) längs jedes Unterraumes

$$x^i = x^i(u^1, u^2, \dots, u^m)$$

bestehen soll. Da der Euler—Lagrangescher Operator vektoriellen Charakter hat, ist (1.6) eine koordinateninvariante Tensorrelation.

In diesem Aufsatz wollen wir nun beweisen, daß unter gewissen Bedingungen die Formel (1.6) im wesentlichen nur dann möglich ist, falls

$$(1.7) \qquad \lambda^k_i(x) = \delta^k_i \varphi(x)$$

besteht, wo $\varphi(x)$ einen allein vom Orte x^i abhängigen Skalar bezeichnet. Wäre statt des Typs (1.6) die Relation

$$(1.8) \qquad \mathscr{E}_i(F^*) \equiv \varphi(x, \dot{x}_\varrho)\mathscr{E}_i(F), \qquad \varphi(x, \dot{x}_\varrho) \neq 0$$

längs jedes Unterraumes $x^i(u^\alpha)$ gültig, wo $\varphi(x, \dot{x}_\varrho)$ einen Skalar bedeutet, so würde (vgl. Hauptsatz II.):

$$(1.9) \qquad (\partial_{\dot{x}^k_\varrho} \varphi(x, \dot{x}_\alpha))\dot{x}^k_\sigma = 0$$

bestehen. Die Grundfunktionen in den Formeln (1.6) und (1.8) bestimmen offenbar äquivalente Variationsprobleme, da aus (1.3) evident auch $\mathscr{E}_i(F^*)=0$ folgt. Das ist auch umgekehrt richtig, falls $\mathrm{Det}\,(\lambda^k_i) \neq 0$ ist, denn in diesem Fall existiert der inverse Tensor von λ^k_i.

§ 2. Der Typ $\mathscr{E}_i(F^*) \equiv \lambda_i^k(x)\mathscr{E}_k(F)$

Es seien

$$F(x^i(u^\alpha), \dot{x}_\gamma^i(u^\beta)), \quad F^*(x^i(u^\alpha), \dot{x}_\gamma^i(u^\beta))$$

zwei Funktionen, die Grundintegrale von der Form (1.1) bestimmen. Nehmen wir ferner an, daß die Relation (1.6) längs jedes Unterraumes $x^i(u^\alpha)$ besteht. Die Relation (1.6) kann auf Grund von (1.2) in der Form

$$(2.1) \qquad \partial_{x^i} F^* - \lambda_i^k \partial_{x^k} F - \dot{x}_\alpha^j (\partial^2_{x^j \dot{x}_\alpha^i} F^* - \lambda_i^k \partial^2_{x^j \dot{x}_\alpha^k} F) - \ddot{x}_{\alpha\beta}^j (\partial^2_{\dot{x}_\alpha^i \dot{x}_\beta^j} F^* - \lambda_i^k \partial^2_{\dot{x}_\alpha^k \dot{x}_\beta^j} F) \equiv 0,$$

$$\ddot{x}_{\alpha\beta}^j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 x^j}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}$$

angegeben werden, woraus wegen $\ddot{x}_{\alpha\beta}^j \equiv \ddot{x}_{\beta\alpha}^j$ unmittelbar folgt, daß

$$(2.2) \qquad \partial^2_{\dot{x}^i_{(\alpha} \dot{x}^j_{\beta)}} F^* \equiv \lambda_i^k(x)\, \partial^2_{\dot{x}^k_{(\alpha} \dot{x}^j_{\beta)}} F \text{ [1]}$$

besteht. $\ddot{x}_{\alpha\beta}^j$ kommt nämlich in den einzelnen Gliedern von (2.1) nur im letzten vor und wegen der Identität muß sein Koeffizient verschwinden. Die linke Seite von (2.2) ist aber auch in (i, j) symmetrisch, wie das durch das explizite Aufschreiben der linken Seite unmittelbar verifiziert werden kann. Somit muß aber auch die rechte Seite in (i, j) symmetrisch sein, d. h. der schiefsymmetrische Teil der rechten Seite von (2.2) ist Null. Es ist somit:

$$(2.3) \qquad \lambda_i^k(x)\, \partial^2_{\dot{x}^k_{(\alpha} \dot{x}^j_{\beta)}} F - \lambda_j^k(x)\, \partial^2_{\dot{x}^k_{(\alpha} \dot{x}^i_{\beta)}} F \equiv 0.$$

Eine Kontraktion mit $\dot{x}_\varrho^i$ gibt nun auf Grund von (1.5)

$$(2.4) \qquad \lambda_i^k(x)\dot{x}_\varrho^i\, \partial^2_{\dot{x}^k_{(\alpha} \dot{x}^j_{\beta)}} F \equiv 0.$$

Bemerkung. Da

$$(2.5) \qquad \dot{x}_\varrho^i \mathscr{E}_i(F) \equiv 0$$

immer eine Identität in x^i, $\dot{x}_\alpha^i$, $\ddot{x}_{\alpha\beta}^i$ ist (vgl. [3], Kap 4. (5.30)), muß der Koeffizient von $\ddot{x}_{\alpha\beta}^i$ verschwinden; das gibt aber eben die bei der Herleitung von (2.4) benützte Relation

$$(2.6) \qquad \dot{x}_\varrho^i\, \partial^2_{\dot{x}^k_{(\alpha} \dot{x}^i_{\beta)}} F \equiv 0,$$

was aber selbstverständlich auch mit (1.5) leicht bewiesen werden kann.

Wir beschränken uns im folgenden auf solche Type der Variationsprobleme, deren Grundfunktionen der folgenden Forderung genügen.

---

[1]) Die Klammern bei den Indizes bedeuten in (2.2) den in (α, β) symmetrischen Teil.

Forderung. *Es soll die Grundfunktion* $F(x, \dot{x}_\gamma)$ *des Grundintegrals* (1.1) *bei fest gewählten* α *und* β *der Relation*

$$Rang\,(\partial^2_{\dot{x}^k_{(\alpha}\dot{x}^j_{\beta)}} F) = n-m$$

genügen, wo der Klammerausdruck eine quadratische Matrix n-ter Ordnung bedeutet.

Auf Grund der Forderung hat das Gleichungssystem

$$X^k_\sigma\, \partial^2_{\dot{x}^k_{(\alpha}\dot{x}^j_{\beta)}} F = 0 \qquad (\alpha, \beta\text{: fest}) \tag{2.7}$$

bezüglich X^k_σ genau m linear-unabhängige Lösungen: $X^k_1, X^k_2, \ldots, X^k_m$. Nach der Formel (2.6) sind das eben die Tangentenvektoren $\dot{x}^k_\varrho$ des Unterraumes $x^k(u^\alpha)$, sogar für jede Indizes α, β in (2.6) bilden sie dasselbe linear-unabhängige Lösungssystem. Nach (2.4) muß aber dann

$$\lambda^k_i(x)\dot{x}^i_\varrho = \Phi^\alpha_\varrho(x, \dot{x}_\gamma)\dot{x}^k_\alpha \tag{2.8}$$

bestehen, wo die Φ^α_ϱ von $(x, \dot{x}_\gamma)$ abhängige Skalare bezeichnen.

Differenzieren wir (2.8) partiell nach $\dot{x}^j_\sigma$, so wird:

$$\lambda^k_j(x)\,\delta^\sigma_\varrho = \delta^k_j \Phi^\sigma_\varrho(x, \dot{x}_\gamma) + (\partial_{\dot{x}^j_\sigma}\Phi^\alpha_\varrho)\dot{x}^k_\alpha. \tag{2.9}$$

Eine Verjüngung bezüglich ϱ, σ gibt unmittelbar:

$$\lambda^k_j(x) = \delta^k_j \varphi(x, \dot{x}_\gamma) + m^{-1}(\partial_{\dot{x}^j_\beta}\Phi^\alpha_\beta)\dot{x}^k_\alpha \tag{2.10}$$

mit

$$\varphi(x, \dot{x}_\gamma) \overset{\text{def}}{=} m^{-1}\Phi^\alpha_\alpha(x, \dot{x}_\gamma), \tag{2.10a}$$

wo $\varphi(x, \dot{x}_\gamma)$ offenbar eine skalare Funktion bedeutet. Setzen wir nun von der Formel (2.10) $\lambda^k_j(x)$ in die zu Grunde gelegte Formel (1.6) ein, beachten wir ferner die Identität (2.5), so erhalten wir:

$$\mathscr{E}_i(F^*) \equiv \varphi(x, \dot{x}_\varrho)\mathscr{E}_i(F), \qquad \varphi(x, \dot{x}_\gamma) \neq 0, \tag{2.11}$$

was formal mit (1.8) übereinstimmt; die Funktion φ ist aber durch (2.10a) festgelegt.

Wenn wir die aus (1.6) abgeleitete Formel: (2.11) mit der ursprünglichen Formel (1.6) vergleichen und dann beachten, daß in (1.6) die Koeffizienten $\lambda^k_i(x)$ von $\mathscr{E}_k(F)$ von den Größen $\dot{x}^l_\gamma$ unabhängig sind, so folgt, daß die Type (1.6) und (2.11) dann und nur dann übereinstimmen, falls der Skalar $\varphi(x, \dot{x}_\gamma)$ im wesentlichen von den $\dot{x}^l_\gamma$ unabhängig ist, d. h. (1.7) gilt. Der Ausdruck: „im wesentlichen" deutet auf (2.10), wo in der Formel von λ^k_j die Größen $\dot{x}^l_\gamma$ doch vorhanden sind, aber sie müssen — wie das schon bemerkt wurde — aus der Formel (2.11) herausfallen, falls (2.11) die Form (1.6) hat. Somit folgt der

Hauptsatz I. *In m-parametrigen äquivalenten Variationsproblemen mit parameterinvarianten Grundintegralen und für die* (1.6) *besteht, hat* $\lambda^k_i(x)$ *im wesentlichen —*

d. h. in seiner ursprünglichen, in (1.6) *vorkommenden Form — die Gestalt* (1.7), *d. h.* $\varphi(x)$ *ist von den* $\dot{x}^i_\gamma$ *unabhängig, bzw.* $\lambda^k_i(x)$ *kann in der Form* (2.10), (2.10a) *angegeben werden.*

Bemerkung. $\varphi(x)$ in (1.7) braucht im allgemeinen nicht mit $\varphi(x, \dot{x}_\gamma)$ von (2.11) übereinstimmen. Aus (2.11) müssen aber die Größen $\dot{x}^k_\alpha$ von $\varphi(x, \dot{x}_\gamma)$ herausfallen.

Bezüglich der Größen Φ^α_β wollen wir noch auf Grund von (2.8) bzw. (2.10) einige Relationen ableiten. Die Bedeutung der Funktionen Φ^α_β besteht darin, daß auf Grund von (2.5) und (2.6) die $\Phi^\alpha_\varrho \dot{x}^k_\alpha$ die allgemeinen gemeinsamen Lösung aller Gleichungen von der Form (2.7) bzw.

$$X^k_\sigma \mathscr{E}_k(F) = 0$$

sind. Wir wollen aber betonen, daß in diesem Paragraphen in unseren nachfolgenden Untersuchungen die Gültigkeit der Formel (2.8) immer vorausgesetzt wird. Das bedeutet die Existenz einer solchen Funktion $F^*(x, x_\gamma)$, die mit $F(x, x_\gamma)$ durch (1.6) verbunden ist. Wir beweisen den

Satz 1. $\Phi^\alpha_\beta(x, \dot{x}_\gamma)$ *ist in den* $\dot{x}^i_\gamma$ *homogen von nullter Dimension, falls die* $\dot{x}^i_\gamma$ *linear unabhängig sind.*

Beweis. Eine Überschiebung von (2.9) mit $\dot{x}^j_\sigma$ gibt in Hinsicht auf (2.8):

$$(\partial_{\dot{x}^j_\sigma} \Phi^\alpha_\varrho) \dot{x}^j_\sigma \dot{x}^k_\alpha = 0. \tag{2.12}$$

Es ist aber das Gleichungssystem

$$\dot{x}^k_\alpha y^\beta_k = \delta^\beta_\alpha \tag{2.13}$$

bezüglich der y^β_k immer lösbar, falls der Rang der Matrix $(\dot{x}^k_\alpha)$ gleich m ist. Das ist aber wegen der linearen Unabhängigkeit der $\dot{x}^k_\gamma$ erfüllt; somit erhält man nach einer Überschiebung mit y^β_k von (2.12)

$$(\partial_{\dot{x}^j_\sigma} \Phi^\beta_\varrho) \dot{x}^j_\sigma = 0, \tag{2.14}$$

was nach Euler eben die charakteristische Differentialgleichung der in den $\dot{x}^k_\alpha$ von nullter Dimension homogenen Funktionen ist. Damit ist der Satz 1. bewiesen.

Wir werden jetzt eine Relation für die in (2.10a) definierte Funktion $\varphi(x, \dot{x}_\gamma)$ ableiten.

Satz 2. *Es gilt für* $\varphi(x, \dot{x}_\gamma)$ *die Relation*

$$(\partial_{\dot{x}^j_\sigma} \varphi) \dot{x}^j_\beta = 0, \quad \varphi \overset{\text{def}}{=} m^{-1} \Phi^\alpha_\alpha, \tag{2.15}$$

falls (2.8) *besteht und die inversen Größen* y^β_k *von* $\dot{x}^k_\alpha$ *existieren.*

Bemerkung. Dieser Satz ist im wesentlichen von den Variationsproblemen unabhängig.

Beweis. Aus (2.8) folgen die Relationen (2.9) und (2.10). Eine Überschiebung von (2.9) mit y^ϱ_k gibt auf Grund von (2.13) und (2.10a)

$$\lambda^k_j y^\sigma_k = \Phi^\sigma_\varrho y^\varrho_j + m\, \partial_{\dot{x}^j_\sigma} \varphi.$$

Eine neue Überschiebung mit $\dot{x}^j_\beta$ gibt in Hinsicht auf (2.8) und (2.13) eben die Relation (2.15), w. z. b. w.

Im falle $m=1$ sind offensichtlich (2.14) und (2.15) identisch und drücken die Homogenität nullter Dimension von $\varphi(x, \dot{x})$ in den $\dot{x}^i$ aus.

§ 3. Der Typ $\mathscr{E}_i(F^*) \equiv \varphi(x, \dot{x}_\varrho)\mathscr{E}_i(F)$

In diesem Paragraphen wollen wir den Typ (1.8) untersuchen, falls aber (1.6), (2.10) und (2.10a) nicht bestehen. Auf Grund von (1.2) hat (1.8) die Form:

$$\partial_{x^i} F^* - \varphi\, \partial_{x^i} F - \dot{x}^j_\alpha (\partial^2_{x^j \dot{x}^i_\alpha} F^* - \varphi\, \partial^2_{x^j \dot{x}^i_\alpha} F) - \ddot{x}^j_{\alpha\beta} (\partial^2_{\dot{x}^i_{(\alpha} \dot{x}^j_{\beta)}} F^* - \varphi\, \partial^2_{\dot{x}^i_{(\alpha} \dot{x}^j_{\beta)}} F) \equiv 0. \tag{3.1}$$

Wegen der Identität in allen $x^i(u^\varrho)$, $\dot{x}^i_\alpha(u^\varrho)$ verschwindet der Koeffizient von $\ddot{x}^j_{\alpha\beta}$. Schreiben wir das auf, differenzieren wir noch nach $\dot{x}^k_\gamma$, so wird:

$$\partial^3_{\dot{x}^i_{(\alpha} \dot{x}^j_{\beta)} \dot{x}^k_\gamma} F^* \equiv \varphi(x, \dot{x}_\delta)\, \partial^3_{\dot{x}^i_{(\alpha} \dot{x}^j_{\beta)} \dot{x}^k_\gamma} F + (\partial_{\dot{x}^k_\gamma} \varphi)\, \partial^2_{\dot{x}^i_{(\alpha} \dot{x}^j_{\beta)}} F. \tag{3.2}$$

Differenzieren wir nun (1.5) nach $\dot{x}^j_\sigma$, so wird:

$$(\partial^3_{\dot{x}^i_\alpha \dot{x}^j_\sigma \dot{x}^k_\varrho} F)\dot{x}^i_\beta \equiv \delta^\alpha_\beta\, \partial^2_{\dot{x}^k_\varrho \dot{x}^j_\sigma} F - \delta^\varrho_\beta\, \partial^2_{\dot{x}^k_\alpha \dot{x}^j_\sigma} F - \delta^\sigma_\beta\, \partial^2_{\dot{x}^j_\alpha \dot{x}^k_\varrho} F.$$

Überschieben wir jetzt (3.2) mit $\dot{x}^k_\sigma$, beachten wir dann unzere letzte Identität und ferner, daß

$$\partial^2_{\dot{x}^i_{(\alpha} \dot{x}^j_{\beta)}} F^* - \varphi(x, \dot{x}_\sigma)\, \partial^2_{\dot{x}^i_{(\alpha} \dot{x}^j_{\beta)}} F \equiv 0, \tag{3.3}$$

was immer besteht, da die linke Seite eben der Koeffizient von $\ddot{x}^j_{\alpha\beta}$ in (3.1) ist, so bekommt man:

$$(\partial_{\dot{x}^k_\gamma} \varphi)\dot{x}^k_\sigma\, \partial^2_{\dot{x}^i_{(\alpha} \dot{x}^j_{\beta)}} F \equiv 0. \tag{3.4}$$

Aus dieser Formel bekommt man den

Satz 3. *Aus der Identität* (1.8) *folgt, daß entweder* (1.9), *oder*

$$\partial^2_{\dot{x}^i_{(\alpha} \dot{x}^j_{\beta)}} F \equiv 0 \tag{3.5}$$

gültig ist.

Nehmen wir jetzt an, daß (3.5) gültig ist. Die Formel (3.1) reduziert sich wegen (3.3) auf

$$\partial_{x^i} F^* - \varphi\, \partial_{x^i} F - \dot{x}^j_\alpha (\partial^2_{x^j \dot{x}^i_\alpha} F^* - \varphi\, \partial^2_{x^j \dot{x}^i_\alpha} F) \equiv 0. \tag{3.6}$$

Differenzieren wir diese Identität partiell nach $\dot{x}^k_\beta$, überschieben wir dann mit $\dot{x}^k_\varrho$, beachten wir die Relationen (1.4) und (1.5), die wir noch nach x^j partiell ableiten müssen, so erhält man in Hinsicht auf (3.6) selbst:

$$(\partial_{\dot{x}^k_\beta} \varphi) \dot{x}^k_\varrho (\partial_{x^i} F - \dot{x}^j_\alpha\, \partial^2_{x^j \dot{x}^i_\alpha} F) \equiv 0. \tag{3.7}$$

Aus dieser Formel folgt der

Satz 4. *Sind* (1.8) *und* (3.5) *Identitäten längs jedes Unterraumes* $x^i(u^\alpha)$, *so besteht entweder* (1.9) *oder es ist* $\mathscr{E}_i(F) \equiv 0$.

Beweis. Wäre (1.9) nicht gültig, so würde aus (3.5) und aus dem Verschwinden des Faktors von $(\partial_{\dot{x}^k_\beta} \varphi) \dot{x}^k_\varrho$ in (3.7) unmittelbar $\mathscr{E}_i(F) \equiv 0$ folgen, wie beauptet wurde.

Aus den Sätzen 3 und 4 folgt der

Haupsatz II. *Ist* (1.8) *gültig, ferner* $\mathscr{E}_i(F) \not\equiv 0$, *so besteht für* $\varphi(x, \dot{x}_\gamma)$ *die Relation* (1.9).

Beweis. Wäre (1.9) nicht richtig, so müßte nach dem Satz 3 die Relation (3.5) bestehen. Somit würde aber nach Satz 4 $\mathscr{E}_i(F) \equiv 0$, im Widerspruch zu unserer Annahme.

Schließlich wollen wir noch denjenigen Fall untersuchen, in dem statt (3.3) die stärkere Bedingung

$$\partial^2_{\dot{x}^i_\alpha \dot{x}^j_\beta} F^* - \varphi(x, \dot{x}_\gamma)\, \partial^2_{\dot{x}^i_\alpha \dot{x}^j_\beta} F \equiv 0 \tag{3.8}$$

besteht. Eine Überschiebung dieser Identität mit $\dot{x}^j_\varrho$ gibt auf Grund von (1.5)

$$\delta^\beta_\varrho\, \partial_{\dot{x}^i_\alpha} F^* - \delta^\alpha_\varrho\, \partial_{\dot{x}^i_\beta} F^* - \varphi(x, \dot{x}_\gamma)(\delta^\beta_\varrho\, \partial_{\dot{x}^i_\alpha} F - \delta^\alpha_\varrho\, \partial_{\dot{x}^i_\beta} F) \equiv 0.$$

Nehmen wir an, daß $m > 1$ ist, so gibt eine Verjüngung über ϱ und β die Identität:

$$\partial_{\dot{x}^i_\alpha} F^* - \varphi(x, \dot{x}_\gamma)\, \partial_{\dot{x}^i_\alpha} F \equiv 0. \tag{3.9}$$

Nach einer neuen Überschiebung mit $\dot{x}^i_\alpha$ wird im Hinblick auf (1.4):

$$F^*(x, \dot{x}_\gamma) - \varphi(x, \dot{x}_\delta) F(x, \dot{x}_\gamma) \equiv 0. \tag{3.10}$$

Differenzieren wir nun diese Identität partiell nach $\dot{x}^i_\alpha$, subtrahieren wir dann aus (3.9), so wird:

$$(\partial_{\dot{x}^i_\alpha} \varphi) F(x, \dot{x}_\gamma) \equiv 0,$$

woraus folgt:

Satz 5. *Ist $m>1$, so folgt aus der Identität* (3.8), *daß die Funktion $\varphi(x, \dot{x}_\gamma)$ in* (3.10) *von den $\dot{x}^i_\gamma$ unabhängig ist.*

Auf Grund von (3.10) und nach Satz 5 geht (1.8) in

$$\mathscr{E}_i(\varphi(x)F) \equiv \varphi(x)\mathscr{E}_i(F), \qquad F = F(x, \dot{x}_\gamma)$$

über. Nach (1.2) bedeutet diese Relation:

$$\partial_{x^i}\varphi - \frac{d\varphi}{du^\alpha}\partial_{\dot{x}^i_\alpha}F \equiv 0,$$

oder, nach einer kleinen Umformung:

$$(\partial_{x^k}\varphi)(\delta^k_i - \dot{x}^k_\alpha \partial_{\dot{x}^i_\alpha}F) \equiv 0$$

woraus nach Satz 5 der folgende dritte Haupsatz folgt:

Hauptsatz III. *Ist $m>1$, ferner ist*

$$Det\,(\delta^k_i - \dot{x}^k_\alpha \partial_{\dot{x}^i_\alpha}F) \neq 0,$$

so folgt aus (1.8) *und* (3.8), *daß in* (1.8) *die Funktion $\varphi(x, \dot{x}_\varrho)$ eine Konstante ist.*

Zum Schluß bemerken wir noch, daß wenn φ eine Konstante ist, so bestimmen

$$\mathscr{E}_i(F) = 0, \quad \mathscr{E}_i(F^*) \equiv \varphi\mathscr{E}_i(F) = 0$$

wirklich äquivalente Variationsprobleme. Die Grundfunktionen F und F^* können aber selbstverständlich verschieden sein, wie das das Korollar auf Seite 111 von [1] zeigt. In diesem Beispiel war aber $m=1$. Ist $m=n-1$, so verweisen wir auf den Satz 3 von [2] auf S. 278. Nach diesem Satz folgt aus unserer Bedingung (3.8), falls $n>2$ und $m=n-1$ gelten, und

$$\mathscr{E}_i(F^*(x, \dot{x}_\gamma)) \equiv \mathscr{E}_i(F(x, \dot{x}_\gamma)),$$

daß im parameterinvarianten Fall $F^*(x, \dot{x}_\gamma) \equiv F(x, \dot{x}_\gamma)$ ist. Dieser Satz zeigt also, daß in manchen Fällen die Parameterinvarianz im Fall $m>1$ eine stärkere Bedingung ist als im Fall $m=1$.

Literatur

[1] A. Moór, Über gewisse Type äquivalenter Variationsprobleme von einem Parameter, *Annales Polonici Math.*, **19** (1967), 107—113.

[2] A. Moór—L. Pintér, Über äquivalente Variationsprobleme von mehreren Veränderlichen, *Acta Sci. Math.*, **28** (1967), 271—279.

[3] H. Rund, *The Hamilton—Jacobi theory in the calculus of variations*, van Nostrand (London, 1966).

(Eingegangen am 29. November 1974)